Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Kevin Drescher

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

14.09.2021

Aufgabe 1:
Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)}$.

Beweis: Die Behauptung kann mittels vollständiger Induktion gezeigt werden.

IA: Für $n = 2$ gilt $\sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{3} = \frac{3}{4} - \frac{5}{12} = \frac{3}{4} - \frac{2\cdot 2+1}{2\cdot 2(2+1)}$.
IV: Für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gelte bereits $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)}$.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2-1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2-1} + \frac{1}{(n+1)^2-1} \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)} + \frac{1}{n^2+2n} \\
&= \frac{3}{4} - \frac{(2n+1)(n+2)}{2n(n+1)(n+2)} + \frac{2(n+1)}{2n(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{3}{4} + \frac{-(2n^2+4n+n+2)+2n+2}{2n(n+2)(n+1)} = \frac{3}{4} - \frac{2n^2+3n}{2n(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)} = \frac{3}{4} - \frac{2(n+1)+1}{2(n+1)((n+1)+1)}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2:
Schreiben Sie die gesuchten Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästen. Es wird jeweils nur das Ergebnis im Kasten bewertet. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jede richtige Antwort wird mit +0,5 Punkten bewertet.

(i) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert, falls dieser existiert:

$$\lim_{x\to 3} \frac{(3-x)^2 - \log(x-2)}{2x^2-7x+3} = \boxed{-\frac{1}{5}}.$$

(ii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die folgende Potenzreihe konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2-2n+3}(x-2)^{2n} \text{ konvergiert } \Leftrightarrow x \in \boxed{[1,3]}.$$

(iii) Es sei die Folge (a_n) definiert durch

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{a_n}{a_n + 2} \ (n \in \mathbb{N}).$$

Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge (a_n):

$$a = \boxed{0}.$$

(iv) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_1^2 \frac{6x^2 + 4}{x^3 + 2x - 2}\, dx = \boxed{2\log(10)}.$$

(v) Es seien $a \in \mathbb{R}$ und

$$f_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_a(x) := \begin{cases} \frac{x^2+(a-2)x-2a}{x-2}, & x \neq 2, \\ 3, & x = 2. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass f_a stetig ist:

$$f_a \text{ ist stetig } \Leftrightarrow \ a \in \boxed{\{1\}}.$$

(vi) Schreiben Sie folgende Zahl als 5-adische Entwicklung:

$$0{,}048 = \boxed{0{,}011_5}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) Der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{x\to 3} \frac{-2(3-x) - \frac{1}{x-2}}{4x - 7} = -\frac{1}{5}.$$

Mit den Regeln von de L'Hospital folgt die Existenz des gegebenen Grenzwertes und es gilt

$$\lim_{x\to 3} \frac{(3-x)^2 - \log(x-2)}{2x^2 - 7x + 3} = -\frac{1}{5}.$$

(ii) Substituiere $y := (x-2)^2$ und betrachte $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2-2n+3} y^n$ mit $a_n := \frac{1}{n^2-2n+3}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt

$$1 \xleftarrow{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{4n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+3}} \leq \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2-2n+3}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Somit ist diese Reihe konvergent für $|y| < 1$ und divergent für $|y| > 1$. Durch Rücksubstitution erhält man Konvergenz für

$$|x-2|^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (1,3)$$

(d.h. der Konvergenzradius beträgt 1). Zu prüfen sind noch die Randpunkte: für $x = 1$ oder $x = 3$ gilt

$$3n^2 - 2n + 1 \geq 3n^2 - 2n^2 = n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, nach dem Majorantenkriterium konvergiert daher auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n^2-2n+1}(x-2)^{2n}$ (für $x = 1$ oder $x = 3$). Somit konvergiert die gegebene Reihe also genau dann, wenn $x \in [1,3]$.

(iii) Es gilt $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ (Beachte: $a_1 \geq 0$). Weiter gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{a_n + 2} \leq \frac{1}{2} \leq 1,$$

d.h. (a_n) ist eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge. Nach dem Monotoniekriterium ist die Folge somit konvergent. Setze $a := \lim_{n\to\infty} a_n$, dann gilt:

$$\begin{aligned} a = \frac{a}{a+2} \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 + 2a = a \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + a = 0 \\ &\Leftrightarrow a(a+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \ \vee \ a = -1. \end{aligned}$$

Wegen $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt $a = 0$.

(iv) Es gilt

$$\int_1^2 \frac{6x^2+4}{x^3+2x-2}\, dx = 2\left[\log(x^3+2x-2)\right]_1^2 = 2(\log(10) - \log(1)) = 2\log(10).$$

(v) Für $x \neq 2$ ist f_a als Komposition stetiger Funktionen für beliebige $a \in \mathbb{R}$ stetig. Damit die Funktion stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist, muss sie zudem in 2 stetig sein. Mittels Polynomdivision erhält man $x^2 + (a-2)x - 2a = (x-2)(x+a)$. Für $x \neq 2$ gilt somit

$$f_a(x) = x + a \xrightarrow{x\to 2} 2 + a \overset{!}{=} 3 = f(2),$$

woraus $a = 1$ folgt. Somit ist f_a genau dann stetig, wenn $a = 1$ gilt.

(vi) Mit dem Algorithmus aus der Vorlesung ergibt sich für $a = 0{,}048 = \frac{48}{1000} = \frac{6}{125}$ und $q = 5$

$$\begin{aligned} z_0 &= [0,048] = 0, & a_0 &= 0,048 - 0 = 0,048, \\ z_1 &= [\tfrac{6}{125} \cdot 5] = [\tfrac{6}{25}] = 0, & a_1 &= \tfrac{6}{25} - 0 = \tfrac{6}{25}, \\ z_2 &= [\tfrac{6}{25} \cdot 5] = [\tfrac{6}{5}] = 1, & a_2 &= \tfrac{6}{5} - 1 = \tfrac{1}{5}, \\ z_3 &= [\tfrac{1}{5} \cdot 5] = [1] = 1, & a_3 &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

und $z_n = 0$ für alle $n \geq 4$. Somit ergibt sich die 5-adische Entwicklung $0{,}048 = 0{,}011_5$. Alternativ kann man wegen $\frac{1}{5^2} = \frac{4}{100}$ und $\frac{1}{5^3} = \frac{8}{1000}$ auch direkt die Behauptung $0{,}048 = 0{,}011_5$ ablesen.

Aufgabe 3:
Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$, bzw. $\Uparrow$, $\Downarrow$, $\Updownarrow$ oder den Text "keine Beziehung" in die Kästchen schreiben. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jedes Kästchen mit korrektem Eintrag wird mit +0,5 Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

Es sei (a_n) eine beschränkte reelle Folge.

(a_n) ist monoton fallend	k.B.$^{1)}$	$\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert absolut	$\Rightarrow^{2)}$	$\sum_{n=1}^\infty a_n^2$ konvergiert
$\Downarrow^{3)}$		$\Downarrow^{4)}$		
(a_n) hat genau einen Häufungswert	$\Leftrightarrow^{5)}$	(a_n) konvergiert	$\Rightarrow^{6)}$	(a_n^2) konvergiert

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

1) $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ ist eine beschränkte, monoton fallende Folge, aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert (harmonische Reihe).
Für $a_n := (-1)^n \frac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, aber die Folge ist nicht monoton.

2) Aus der (absoluten) Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ folgt, dass (a_n) eine Nullfolge ist, d.h. es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n| < 1$ ist für alle $n \geq n_0$. Damit gilt $a_n^2 \leq |a_n|$ für alle $n \geq n_0$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert somit die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.
Definiere $a_n := (-1)^n \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Wegen $a_n^2 = \frac{1}{n^2}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert nicht absolut.

3) (a_n) ist beschränkt und monoton fallend und somit konvergent nach dem Monotoniekriterium, somit hat die Folge genau einen Häufungswert.
Die Folge $a_n := 1 - \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ hat genau einen Häufungswert, ist aber streng monoton wachsend.

4) Aus der (absoluten) Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ folgt, dass (a_n) eine Nullfolge ist, d.h. (a_n) konvergiert gegen 0 und ist natürlich konvergent.
Die konstante Folge $a_n := 1$ $(n \in \mathbb{N})$ konvergiert, aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert nicht, da es sich bei (a_n) nicht um eine Nullfolge handelt.

5) Da die Folge beschränkt ist, sind diese Aussagen nach der Vorlesung äquivalent.

6) Das Produkt zweier konvergenter Folgen ist wieder konvergent.
Definiere $a_n := (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann ist $(a_n^2) = (1)$ konvergent, aber (a_n) selbst nicht.

Aufgabe 4:

(i) Untersuchen Sie die folgende Funktionenfolge auf punktweise Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion an. Ist (f_n) gleichmäßig konvergent?

$$f_n \colon [0,2] \to \mathbb{R},\ f_n(x) := (2-x)\,|x-1|^n \ \ (n \in \mathbb{N}).$$

(ii) Untersuchen Sie die folgende Funktionenreihe auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{4n^2 - xn} \qquad \text{für } x \in [0,2].$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(i) *Behauptung:* (f_n) konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig, gegen die Funktion

$$f \colon [0,2] \to \mathbb{R}, f(x) := \begin{cases} 2, & x = 0, \\ 0, & x \in (0,2]. \end{cases}$$

Beweis: Für $x = 0$ gilt $f_n(x) = 2 \to 2$ $(n \to \infty)$ und für $x = 2$ gilt $f_n(2) = 0 \to 0$ $(n \to \infty)$. Für $x \in (0,2)$ gilt $|x-1| < 1$ und somit $|x-1|^n \to 0$ für $n \to \infty$. Man erhält also

$$f_n(x) = (2-x)\,|x-1|^n \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Folglich erhält man die punktweise Grenzfunktion

$$f \colon [0,2] \to \mathbb{R}, f(x) := \begin{cases} 2, & x = 0, \\ 0, & x \in (0,2]. \end{cases}$$

Da die Funktionen f_n alle stetig sind, die Grenzfunktion f allerdings nicht, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein. □

(ii) *Behauptung:* Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{4n^2 - xn}$ konvergiert auf $[0,2]$ gleichmäßig und damit insbesondere auch punktweise.

Beweis: Für alle $x \in [0, 2]$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{x}{4n^2 - xn} \leq \frac{x}{4n^2 - 2n} \leq \frac{2}{4n^2 - 2n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, folgt die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe aus dem Kriterium von Weierstraß. Des Weiteren impliziert gleichmäßige Konvergenz auch punktweise Konvergenz. $\square$

Aufgabe 5:

(i) Es sei die Funktion $f\colon [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := -4\cos\left(\frac{x}{4}\right) + 4\sin\left(\frac{x}{4}\right)$. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante $\sqrt{2}$.

Hinweis: Es gilt $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(ii) Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion in allen Punkten, in denen sie differenzierbar ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(i) *Behauptung:* f ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $\sqrt{2}$.

Beweis: f ist (beliebig oft) stetig differenzierbar. Somit existiert zu $x, y \in [-2\pi, 2\pi]$ (es sei ohne Einschränkung $x < y$) nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (x, y)$ mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$$

und damit folgt

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)|\,|x - y| \leq \max_{\xi \in [-2\pi, 2\pi]} |f'(\xi)|\,|x - y|\,,$$

wobei letzteres Maximum existiert, da f' stetig und das Intervall kompakt ist. Um das Maximum von f' auf $[-2\pi, 2\pi]$ zu bestimmen, berechnet man zunächst die ersten beiden Ableitungen von f. Es gilt für $x \in [-2\pi, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin\left(\frac{x}{4}\right) + \cos\left(\frac{x}{4}\right), \\ f''(x) &= \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{x}{4}\right). \end{aligned}$$

Damit f' an einer Stelle $x_0 \in (-2\pi, 2\pi)$ ein lokales Extremum besitzt, muss $f''(x_0) = 0$ gelten. Es gilt $\sin\left(\frac{x}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$ genau dann, wenn $x = \pi + 4k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Dies ist somit genau dann der Fall, wenn $x = \pi$ gilt. Weiter gilt $f'(\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$. Am Rand gilt: $f'(-2\pi) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ und $f'(2\pi) = 1$. Wegen $1 < \sqrt{2}$ gilt $\max_{\xi \in [-2\pi, 2\pi]} |f'(\xi)| = \sqrt{2}$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

(ii) *Behauptung:* f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Beweis: Für $x < 0$ ist $f(x) = 0$ und somit differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = 0$. Für $x > 0$ ist f nach der Produkt- und Kettenregel differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$

Im Punkt $x = 0$ gilt: für $h < 0$ gilt $f'(0-) = \lim\limits_{h \to 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$. Für $h > 0$ erhält man

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{h}} \xrightarrow{h \to 0+} 0,$$

d.h. $f'(0+) = 0$ und somit existiert die Ableitung im Punkt 0 und ist gegeben durch $f'(0) = 0$. $\square$